$$g_{11} = E = \frac{1}{|I|}\int P^1\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2},$$

$$g_{22} = G = \frac{1}{|I|}\int P^1\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2},$$

$$g_{12} = F = -\frac{1}{|I|}\int P^1\left(t,x,dy\right)\frac{y_1 y_2}{2},$$

$$|I| = \int P^1\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P^1\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2} - \left[\int P^1\left(t,x,dy\right)\frac{y_1 y_2}{2}\right]^2.$$

Теорема 2. *Пусть Q — некоторое множество на поверхности ограниченного искривления F. Имеет место формула*

$$\omega(Q) = \iint_Q \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\,d\sigma,$$

где $\omega(Q)$— кривизна Q, $d\sigma$ — элемент площади, коэффициенты L, M, N, E, F, G выражаются через характеристики случайных процессов как в теореме 1.

Литература

1. Дынкин Е.Б. *Марковские процессы* – Москва, Государственное издание физико-математической литературы, 1963. 1999. – 606 с.

2. Бакельман И.Я. *Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей* // УМН. – 1956. – Т. 2. – Вып. 2. – С. 67–124.

STOCHASTIC ANALOG OF THE GAUSS-PETERSON-CODAZZI EQUATIONS FOR SURFACES OF BOUNDED CURVATURE

D.S. Klimentov

In the present note, a stochastic analogue of the Gauss-Peterson-Codazzi equations is derived and a stochastic analogue of the basic theorem of the theory of surfaces for surfaces of positive curvature of bounded curvature is given.

Keywords: Surface of limited curvature, diffusion process.

УДК 514.763

О КРИВИЗНЕ РИЧЧИ-ПЛОСКИХ КЭЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В.Н. Кокарев[1]

1 *ko1949@yandex.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

В работе исследуется поведение модуля тензора кривизны и голоморфной секционной кривизны на Риччи-плоских кэлеровых многообразиях.

Ключевые слова: Риччи-плоское многообразие, тензор кривизны.

Пусть M – кэлерово многообразие с кэлеровой метрикой g нулевой кривизны Риччи. Тогда метрику g называют Риччи-плоской кэлеровой метрикой. Пусть Δ, ∇ – оператор Лапласа–Бельтрами и градиент, соответственно, для метрики g.

С помощью тензора кривизны $K_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}$ можно построить инварианты

$$|K|^2 = g^{\alpha\bar\lambda}g^{\mu\bar\beta}g^{\gamma\bar\nu}g^{\varepsilon\bar\delta}K_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}\overline{K_{\lambda\bar\mu\nu\bar\varepsilon}} = g^{\alpha\bar\lambda}g^{\mu\bar\beta}g^{\gamma\bar\nu}g^{\varepsilon\bar\delta}K_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}K_{\bar\lambda\mu\bar\nu\varepsilon} = K_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}K^{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta},$$

$$T_1 = K^{\alpha\bar\beta}_{..\gamma\bar\delta}K^{\gamma\bar\delta}_{..\varepsilon\bar\lambda}K^{\varepsilon\bar\lambda}_{..\alpha\bar\beta}$$

(сворачиваются пары индексов разных типов, стоящие на одном уровне),

$$T_2 = K^{.\beta.\delta}_{\alpha.\gamma.}K^{.\varepsilon\delta.}_{\bar\delta..\beta}K^{\alpha.\gamma.}_{.\varepsilon.\delta}$$

(сворачиваются пары индексов одного типа, стоящие на одном уровне).

Теорема 1. *Для Риччи-плоской кэлеровой метрики*

$$\Delta(|K|^2) \geqslant 4T_1 + 2T_2 + \frac{|\nabla(|K|^2)|^2}{2|K|^2}. \tag{1}$$

Для случая, когда M компактно, то есть является многообразием Калаби–Яу, имеет место

Теорема 2. *Многообразие Калаби-Яу является комплексным тором тогда и только тогда, когда для его метрики Калаби-Яу* $T_1 = T_2 = 0$.

Если n – комплексная размерность многообразия M, то для $|K| = \sqrt{|K|^2}$ из (1) получаем

$$\Delta(|K|^2) \geqslant -c|K|^3 + \frac{|\nabla(|K|^2)|^2}{2|K|^2}, \tag{2}$$

где $c = 6n^6$.

Если в некоторой области $D \subset M$ для функции f выполнено

$$\Delta f \leqslant -cf^{3/2} + \frac{|\nabla f|^2}{2f}, \tag{3}$$

то, вычитая почленно из неравенства (3) неравенство (2), получим

$$\Delta(f - |K|^2) \leqslant -c(f^{3/2} - |K|^3) + \frac{|\nabla f|^2}{2f} - \frac{|\nabla(|K|^2)|^2}{2|K|^2}.$$

Значит функция $f - |K|^2$ не может достигать в области D положительного минимума.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = c_0 - c_1 r^2$, где r – расстояние от точки O до точки x. Легко проверить, что при $c_1 \geqslant \dfrac{cc_0^{3/2}}{4n}$ в области D, где $f(x) > 0$, функция $f(x)$ удовлетворяет (3). Взяв в качестве точки O точку локального максимума функции $|K|$, а $c_0 > |K|^2(O)$, получим, что $|K|^2$ не может в области D убывать быстрее, чем функция f.

Пусть $K_\sigma(x)$ – голоморфная секционная кривизна в точке $x \in M$ в направлении голоморфной 2-плоскости σ. Обозначим $H(x) = \max_\sigma |K_\sigma(x)|$, где максимум берется по всем голоморфным 2-плоскостям в касательном пространстве $T_x M$.

Теорема 3. *Не существует такого шара B с центром в точке $O \in M$, что для всех внутренних точек $x \in B$ $\quad f(x) > H^2(x)$, а для всех граничных точек $x \in \partial B$*

$$f(O) - H^2(O) \leqslant f(x) - \left(\frac{23n^2}{4}\right)^2 H^2(x).$$

Таким образом, на Риччи-плоском кэлеровом многообразии функции $|K|$ и H не могут иметь слишком больших "всплесков".

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00154а).

Литература

1. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна, Т. 1,2.* – М.: Мир, 1990. – 704 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии, Т. 2.* – М.: Наука, 1981. – 416 с.

ABOUT CURVATURE OF RICCI-FLAT KÄHLER MANIFOLDS

V.N. Kokarev

The behavior of modulus of curvature tensor and holomorphic sectional curvature on Ricci-flat Kähler manifolds is investigated.

Keywords: Ricci-flat manifold, curvature tensor.

УДК 514.13

ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

А.В. Костин[1], Н.Н. Костина[2]

1 *kostin andrei@mail.ru*; Казанский(Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт
2 *natnikost@mail.ruя*; Казанский(Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

В данной работе мы рассматриваем интерпретации асимптотических направлений на псевдосферах евклидова и псевдоевклидова пространств.

Ключевые слова: Асимптотическая линия, псевдосфера, гиперболическая плоскость.

Асимптотические направления на псевдосферах евклидова и псевдоевклидова простанств можно истолковать в рамкам внутренней геометрии этих псевдосферических поверхностей. Одна из интерпретаций для асимптотических направлений на псевдосфере Бельтрами-Миндинга основана на следующем свойстве.

Теорема. *Угол между асимптотической линией и параллелью псевдосферы Бельтрами-Миндинга равен гудерманиану длины дуги асимптотической от ребра возврата и гудерманиану длины проекции этой дуги на ребро возврата. Угол между асимп-*